



## Най-редки насекоми

Има  $N$  насекоми, индексирани от 0 до  $N - 1$ , тичащи около къщата на Пак Блангкон. Всяко насекомо има **тип**, което е цяло число между 0 и  $10^9$  включително. Няколко насекоми могат да имат един и същи тип.

Да предположим, че насекомите са групирани по тип. Ние определяме кардиналността на **най-често срещания** тип насекомо като броя на насекомите в група с най-голям брой насекоми. По същия начин кардиналността на **най-редкия** тип насекомо е броят на насекомите в група с най-малък брой насекоми.

Да предположим например, че има 11 насекоми, чиито типове са  $[5, 7, 9, 11, 11, 5, 0, 11, 9, 100, 9]$ . В този случай кардиналността на **най-често срещания** тип насекомо е 3. Групите с най-голям брой насекоми съдържат насекоми от тип 9 и от тип 11, всяка от които се състои от 3 насекоми. Кардиналността на **най-редкия** вид насекомо е 1. Групите с най-малък брой насекоми съдържат насекоми от тип 7, от тип 0 и от тип 100, всяка от които се състои от 1 насекомо.

Пак Блангкон не знае вида на нито едно насекомо. Той има машина с един бутон, която може да предостави информация за видовете насекоми. Първоначално машината е празна. При използване на машината, могат да се извършват три вида операции:

1. Преместете насекомо вътре в машината.
2. Преместете насекомо извън машината.
3. Натиснете бутона на машината.

Всеки тип операция може да се извърши най-много 40 000 пъти.

Всеки път, когато бутонът бъде натиснат, машината отчита кардиналността на **най-често срещания** тип насекомо, като се вземат предвид само насекомите вътре в машината.

Вашата задача е да определите кардиналността на **най-редкия** тип насекомо сред всички  $N$  насекоми в къщата на Пак Блангкон, като използвате машината. Освен това, в някои подзадачи вашият резултат зависи от максималния брой операции от даден тип, които се изпълняват (за подробности вижте раздела Подзадачи).

## Детайли по имплементацията

Трябва да имплементирате следната процедура:

```
int min_cardinality(int N)
```

- $N$ : броят на насекомите.
- Тази процедура трябва да върне кардиналността на **най-редкия** тип насекомо сред всички  $N$  насекоми в къщата на Пак Блангкон.
- Тази процедура се извиква точно веднъж.

Горната процедура може да извиква следните процедури:

```
void move_inside(int i)
```

- $i$ : индексът на насекомото, което ще бъде преместено вътре в машината. Стойността на  $i$  трябва да бъде между 0 и  $N - 1$  включително.
- Ако това насекомо вече е вътре в машината, извикването няма ефект върху набора от насекоми в машината. Въпреки това, то се брои като отделно извикване.
- Тази процедура може да бъде извикана най-много 40 000 пъти.

```
void move_outside(int i)
```

- $i$ : индексът на насекомото, което ще бъде преместено извън машината. Стойността на  $i$  трябва да бъде между 0 и  $N - 1$  включително.
- Ако това насекомо вече е извън машината, извикването няма ефект върху набора от насекоми в машината. Въпреки това, то се брои като отделно извикване.
- Тази процедура може да бъде извикана най-много 40 000 пъти.

```
int press_button()
```

- Тази процедура връща кардиналността на **най-често срещания** тип насекомо, като се вземат предвид само насекомите вътре в машината.
- Тази процедура може да бъде извикана най-много 40 000 пъти.
- Грейдърът е **не адаптивен**. Това означава, че типовете на всички  $N$  насекоми са фиксирани, преди да се извика `min_cardinality`.

## Пример

Разглеждаме сценарий, в който има 6 насекоми съответно от типове [5, 8, 9, 5, 9, 9]. Процедурата `min_cardinality` се извиква по следния начин:

```
min_cardinality (6)
```

Процедурата може да извика `move_inside`, `move_outside` и `press_button`, както следва.

Извикване	Върната стойност	Насекоми в машината	Видове насекоми в машината
		{}	[]
move_inside(0)		{0}	[5]
press_button()	1	{0}	[5]
move_inside(1)		{0,1}	[5,8]
press_button()	1	{0,1}	[5,8]
move_inside(3)		{0,1,3}	[5,8,5]
press_button()	2	{0,1,3}	[5,8,5]
move_inside(2)		{0,1,2,3}	[5,8,9,5]
move_inside(4)		{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]
move_inside(5)		{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
press_button()	3	{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
move_inside(5)		{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
press_button()	3	{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
move_outside(5)		{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]
press_button()	2	{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]

Към този момент, е събрана достатъчно информация, за да заключим, че кардиналността на най-редкия вид насекомо е 1. Следователно процедурата `min_cardinality` трябва да върне 1.

В този пример `move_inside` се извиква 7 пъти, `move_outside` се извиква 1 пъти, а `press_button` се извиква 6 пъти.

## Ограничения

- $2 \leq N \leq 2000$

## Подзадачи

1. (10 points)  $N \leq 200$
2. (15 points)  $N \leq 1000$
3. (75 points) Без допълнителни ограничения.

Ако в някой от тестовите случаи извикванията на процедурата `move_inside`, `move_outside` или `press_button` не съответстват на ограниченията, описани в Детайли по

имплементацията, или върнатата стойност на `min_cardinality` е неправилна, резултатът от вашето решение за тази подзадача ще бъде 0 точки.

Нека  $q$  е **максимумът** от следните три стойности: броя извиквания на `move_inside`, броя извиквания на `move_outside` и броят извиквания на `press_button`.

В подзадача 3 можете да получите частичен резултат. Нека  $m$  е максималната стойност на  $\frac{q}{N}$  във всички тестови случаи в тази подзадача. Вашият резултат за тази подзадача се изчислява съгласно следната таблица:

Условие	Точки
$20 < m$	0 (съобщава се като "Output isn't correct" в CMS)
$6 < m \leq 20$	$\frac{225}{m-2}$
$3 < m \leq 6$	$81 - \frac{2}{3}m^2$
$m \leq 3$	75

## Примерен грейдър

Нека  $T$  е масив от  $N$  цели числа, където  $T[i]$  е видът на насекомото  $i$ .

Примерният грейдър чете входа в следния формат:

- ред 1:  $N$
- ред 2:  $T[0] \ \backslash; \ T[1] \ \backslash; \ \backslash\text{точки} \ \backslash; \ T[N - 1]$

Ако примерният грейдър открие нарушение на протокола, изходът на примерния грейдър е `Protocol Violation: <MSG>`, където `<MSG>` е едно от следните:

- `invalid parameter`: при извикване на `move_inside` или `move_outside`, стойността на  $i$  не е между 0 и  $N - 1$  включително.
- `too many calls`: броят на извикванията на **някое** от `move_inside`, `move_outside` или `press_button` надвишава 40 000.

В противен случай изходът на примерния грейдър е в следния формат:

- ред 1: върнатата стойност на `min_cardinality`
- ред 2:  $q$