



Los Insectos más Raros

En la casa de Pak Blangkon existen N insectos, numerados de 0 a $N - 1$. Cada insecto pertenece a un **tipo**, que es un entero entre 0 y 10^9 inclusive. Múltiples insectos pueden pertenecer al mismo tipo.

Supongamos que los insectos son agrupados por tipo. Definimos la cardinalidad del tipo de insecto **más frecuente** como la cantidad de insectos dentro del grupo que contiene más insectos. De forma similar, definimos la cardinalidad del tipo de insecto **más raro** como la cantidad de insectos dentro del grupo que contiene la menor cantidad de insectos.

Por ejemplo, supongamos que hay 11 insectos donde sus tipos son $[5, 7, 9, 11, 11, 5, 0, 11, 9, 100, 9]$. En este caso, la cardinalidad del tipo de insecto **más frecuente** es de 3. Los grupos con la mayor cantidad de insectos son los de tipo 9 y tipo 11, cada uno con 3 insectos. La cardinalidad del tipo de insecto **más raro** es 1. Los grupos con la menor cantidad de insectos son los de tipo 7, tipo 0, y tipo 100, cada uno con 1 insecto.

Pak Blangkon no conoce el tipo de ningún insecto. Tiene una máquina con un solo botón que puede dar algo de información sobre los tipos de los insectos. Inicialmente, la máquina está vacía. Para usar la máquina, se pueden realizar 3 tipos de operaciones:

1. Poner un insecto dentro de la máquina.
2. Sacar un insecto de la máquina.
3. Presionar el botón de la máquina.

Cada operación se puede realizar a lo más 40 000 veces.

Cada vez que el botón es presionado, la máquina reporta la cardinalidad del tipo de insecto **más frecuente**, considerando solamente los insectos que están dentro de la máquina.

Tu tarea es determinar la cardinalidad del tipo de insecto **más raro** entre todos los N insectos que se encuentran en la casa de Pak Blangkon, usando solamente la máquina. Adicionalmente, en algunas subtareas, tu puntaje dependerá del máximo número de operaciones de cierto tipo que realices (ver sección de Subtareas para más detalles).

Detalles de Implementación

Debes implementar el siguiente procedimiento:

```
int min_cardinality(int N)
```

- N : el número de insectos.
- Este procedimiento debe retornar la cardinalidad del tipo de insecto **más raro** entre todos los N insectos dentro de la casa de Pak Blangkon.
- Este procedimiento se llama exactamente una vez.

El procedimiento de arriba puede hacer llamadas a los siguientes procedimientos:

```
void move_inside(int i)
```

- i : el índice del insecto que se pondrá dentro de la máquina. El valor de i debe estar entre 0 y $N - 1$ inclusive.
- Si el insecto ya se encuentra dentro de la máquina, la llamada no causará efecto en el conjunto de insectos que se encuentran adentro de la máquina. Sin embargo, aún así será contado como una llamada.
- Este procedimiento puede ser llamado a lo más 40 000 veces.

```
void move_outside(int i)
```

- i : el índice del insecto que será removido de la máquina. El valor de i debe estar entre 0 y $N - 1$ inclusive.
- Si el insecto ya se encuentra fuera de la máquina, la llamada no causará efecto en el conjunto de insectos que se encuentran adentro de la máquina. Sin embargo, aún así será contado como una llamada.
- Este procedimiento puede ser llamado a lo más 40 000 veces.

```
int press_button()
```

- Este procedimiento regresa la cardinalidad del tipo de insecto **más frecuente**, considerando sólo los insectos que se encuentran adentro de la máquina
- Este procedimiento puede ser llamado a lo más 40 000 veces.

Ejemplo

Considera un escenario donde hay 6 tipos de insectos [5,8,9,5,9,9] respectivamente. El procedimiento `min_cardinality` es llamado de la siguiente forma:

```
min_cardinality(6)
```

El procedimiento puede llamar `move_inside`, `move_outside`, y `press_button` de la siguiente forma.

Llamada	Valor retornado	Insectos adentro de la máquina	Tipos de insectos adentro de la máquina
		{}	[]
move_inside(0)		{0}	[5]
press_button()	1	{0}	[5]
move_inside(1)		{0,1}	[5,8]
press_button()	1	{0,1}	[5,8]
move_inside(3)		{0,1,3}	[5,8,5]
press_button()	2	{0,1,3}	[5,8,5]
move_inside(2)		{0,1,2,3}	[5,8,9,5]
move_inside(4)		{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]
move_inside(5)		{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
press_button()	3	{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
move_inside(5)		{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
press_button()	3	{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
move_outside(5)		{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]
press_button()	2	{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]

En este momento, hay suficiente información para concluir que la cardinalidad del insecto más raro es 1. Por lo tanto, el procedimiento `min_cardinality` debe regresar 1.

En este ejemplo, `move_inside` es llamado 7 veces, `move_outside` es llamado 1 vez, y `press_button` es llamado 6 veces.

Restricciones

- $2 \leq N \leq 2000$

Subtareas

1. (10 puntos) $N \leq 200$
2. (15 puntos) $N \leq 1000$
3. (75 puntos) Sin restricciones adicionales.

Si en alguno de los casos de prueba, las llamadas a los procedimientos `move_inside`, `move_outside`, o `press_button` no siguen las restricciones descritas en Detalles de

Implementación, o el valor retornado por `min_cardinality` es incorrecto, entonces tu puntaje para la subtarea será 0.

Sea q el **máximo** de los siguientes 3 valores: la cantidad de llamadas a `move_inside`, la cantidad de llamadas a `move_outside`, la cantidad de llamadas a `press_button`.

En el subproblema 3, puedes obtener puntaje parcial. Sea m el valor máximo de $\frac{q}{N}$ entre todos los casos de prueba en la subtarea. El puntaje para esta subtarea es calculado de la siguiente manera:

Condición	Puntos
$20 < m$	0 (reportado como "Output isn't correct" en CMS)
$6 < m \leq 20$	$\frac{225}{m-2}$
$3 < m \leq 6$	$81 - \frac{2}{3}m^2$
$m \leq 3$	75

Evaluador de ejemplo

Sea T un arreglo de N enteros donde $T[i]$ es el tipo del insecto i .

El evaluador de ejemplo lee la entrada de la siguiente manera:

- línea 1: N
- línea 2: $T[0] T[1] \dots T[N - 1]$

Si el evaluador de ejemplo detecta una violación de protocolo, la salida del evaluador de ejemplo será `Protocol Violation: <MSG>`, donde `<MSG>` es alguno de los siguientes:

- `invalid parameter`: en una llamada a `move_inside` o `move_outside`, el valor de i no está entre 0 y $N - 1$ inclusive.
- `too many calls`: la cantidad de llamadas a **alguno** de los procedimientos `move_inside`, `move_outside`, o `press_button` excede 40 000.

De lo contrario, la salida del evaluador de ejemplo tendrá el siguiente formato:

- línea 1: el valor retornado de `min_cardinality`
- línea 2: q