



Insectos Raros

Existen N insectos, con índices desde 0 a $N - 1$, corriendo alrededor de la casa de Pak Blangkon. Cada insecto tiene un **tipo**, el cual, es un entero entre 0 y 10^9 inclusive. Múltiples insectos pueden tener el mismo tipo.

Suponga que los insectos están agrupados por tipo. Definimos la cardinalidad del tipo de insecto **más frecuente** como el número de insectos que pertenecen al grupo con mayor número de insectos. De forma similar, definimos la cardinalidad del tipo de insecto **más raro** como el número de insectos que pertenecen al grupo con menor número de insectos

Por ejemplo, suponga que existen 11 insectos, cuyos tipos son $[5, 7, 9, 11, 11, 5, 0, 11, 9, 100, 9]$. En este caso, la cardinalidad del tipo de insecto **más frecuente** es 3. Los grupos con el mayor número de insectos son el de tipo 9 y el de tipo 11, siendo cada uno de 3 insectos. La cardinalidad del tipo de insecto **más raro** es 1. Los grupos con el menor número de insectos son el de tipo 7, el de tipo 0 y el de tipo 100, siendo cada uno de 1 insecto.

Pak Blangkon no conoce el tipo de ningún insecto. El tiene una máquina con un solo botón que le provee información acerca de los tipos de los insectos. Inicialmente, la máquina está vacía. Para utilizar la máquina, tres tipos de operaciones pueden ser realizadas:

1. Mover un insecto dentro de la máquina.
2. Mover un insecto fuera de la máquina.
3. Presionar el botón de la máquina.

Cada tipo de operación se puede realizar hasta 40 000 veces.

En cualquier momento que se presiona el botón, la máquina reporta la cardinalidad del tipo de insecto **más frecuente**, considerando solamente los insectos dentro de la máquina.

Su tarea es determinar la cardinalidad del tipo de insecto **más raro** entre todos los N insectos en la casa de Pak Blangkon utilizando la máquina. Adicionalmente, en algunas subtareas, el resultado dependerá del máximo número de operaciones de cada tipo que sean realizadas (ver las sección de Subtareas para más detalles).

Detalles de Implementación

Usted debe implementar el siguiente procedimiento:

```
int min_cardinality(int N)
```

- N : es el número de insectos
- Este procedimiento debe retornar la cardinalidad del tipo de insecto **más raro** entre los N insectos de la casa de Pak Blangkon.
- Este procedimiento será llamado solamente una vez.
- El Evaluador no es **adaptativo**. Es decir, los tipos de todos los N insectos se fijan antes `min_cardinality` se llama.

El procedimiento anterior puede hacer llamadas a los siguientes procedimientos:

```
void move_inside(int i)
```

- i : el índice del insecto que va a ser colocado dentro de la máquina. El valor de i debe estar entre 0 y $N - 1$ inclusive.
- Si el insecto ya está dentro de la máquina, la llamada no tiene efecto en el conjunto de insectos dentro de la misma. Sin embargo, será contada igualmente como una llamada.
- Este procedimiento puede ser llamado hasta 40 000 veces.

```
void move_outside(int i)
```

- i : el índice del insecto que se va a colocar fuera de la máquina. El valor de i debe estar entre 0 y $N - 1$ inclusive.
- Si este insecto ya está fuera de la máquina, la llamada no tiene efecto en el conjunto de insectos dentro de la misma. Sin embargo, será contada igualmente como una llamada.
- Este procedimiento puede ser llamado hasta 40 000 veces.

```
int press_button()
```

- Este procedimiento retorna la cardinalidad del tipo de insecto **más frecuente**, considerando solamente los insectos dentro de la máquina.
- Este procedimiento puede ser llamado hasta 40 000 veces.

Ejemplo

Considere un escenario en el cual existen 6 insectos de tipos [5, 8, 9, 5, 9, 9] respectivamente. El procedimiento `min_cardinality` será llamado de la siguiente manera:

```
min_cardinality(6)
```

El procedimiento puede llamar a `move_inside`, `move_outside`, y `press_button` como sigue.

Llamada	Valor de Retorno	Insectos en la máquina	Tipos de insecto en la máquina
		{}	[]
move_inside(0)		{0}	[5]
press_button()	1	{0}	[5]
move_inside(1)		{0, 1}	[5, 8]
press_button()	1	{0, 1}	[5, 8]
move_inside(3)		{0, 1, 3}	[5, 8, 5]
press_button()	2	{0, 1, 3}	[5, 8, 5]
move_inside(2)		{0, 1, 2, 3}	[5, 8, 9, 5]
move_inside(4)		{0, 1, 2, 3, 4}	[5, 8, 9, 5, 9]
move_inside(5)		{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
press_button()	3	{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
move_inside(5)		{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
press_button()	3	{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
move_outside(5)		{0, 1, 2, 3, 4}	[5, 8, 9, 5, 9]
press_button()	2	{0, 1, 2, 3, 4}	[5, 8, 9, 5, 9]

En este punto, hay suficiente información para concluir que la cardinalidad del tipo de insecto más raro es 1. Por lo tanto, el procedimiento `min_cardinality` debe retornar 1.

En este ejemplo `move_inside` es llamado 7 veces, `move_outside` es llamado 1 vez, y `press_button` es llamado 6 veces.

Restricciones

- $2 \leq N \leq 2000$

Subtareas

1. (10 puntos) $N \leq 200$
2. (15 puntos) $N \leq 1000$
3. (75 puntos) Sin restricciones adicionales.

Si en alguno de los casos de prueba, las llamadas al procedimiento `move_inside`, `move_outside` o `press_button` no cumplen las restricciones descritas en los Detalles de Implementación, o el

valor de retorno de `min_cardinality` es incorrecto, el puntaje de tu solución para esta subtarea será 0.

Sea q el **máximo** de los siguientes tres valores: el número de llamadas a `move_inside`, el número de llamadas a `move_outside`, y el número de llamadas a `press_button`.

En la subtarea 3, puedes obtener una puntuación parcial. Sea m el máximo valor de $\frac{q}{N}$ entre todos los casos de prueba en esta subtarea. Su puntuación para esta subtarea será calculada de acuerdo a la siguiente tabla:

Condición	Puntos
$20 < m$	0 (reportada como "Output isn't correct" in CMS)
$6 < m \leq 20$	$\frac{225}{m-2}$
$3 < m \leq 6$	$81 - \frac{2}{3}m^2$
$m \leq 3$	75

Evaluador de Ejemplo

Sea T un arreglo de N enteros donde $T[i]$ es el tipo del insecto i .

El evaluador de ejemplo lee la entrada en el siguiente formato:

- línea 1: N
- línea 2: $T[0] T[1] \dots T[N - 1]$

Si el evaluador de ejemplo detecta una violación del protocolo, la salida del evaluador de ejemplo es `Protocol Violation: <MSG>`, donde `<MSG>` es uno de las siguientes:

- `invalid parameter`: en una llamada a `move_inside` o `move_outside`, el valor i no está entre 0 y $N - 1$ inclusive.
- `too many calls`: el número de llamadas a **alguno** de los procedimientos `move_inside`, `move_outside`, o `press_button` supera las 40 000.

De cualquier otra manera, la salida del evaluador de ejemplo será en el siguiente formato:

- línea 1: el valor de retorno de `min_cardinality`
- línea 2: q