



## Rarest Insects

Postoji  $N$  buba, indeksiranih cijelim brojevima od 0 do  $N - 1$ , koje se zabavljaju trčeći po kući Paka Blangkona. Svaka buba je ima neki svoj **tip**, koji je predstavljen cijelim brojem između 0 i  $10^9$  (uključivo). Više buba mogu biti istog tipa.

Pretpostavimo da su bube grupirane po tipu. Definiramo kardinalnost **najfrekventnijeg** tipa buba kao broj buba u grupi s najvećim brojem buba. Slično, definiramo kardinalnost **najrjeđeg** tipa buba kao broj buba u grupi s najmanjim brojem buba.

Primjerice, pretpostavimo da postoji 11 buba, čiji su tipovi  $[5, 7, 9, 11, 11, 5, 0, 11, 9, 100, 9]$ . U tom je slučaju kardinalnost **najfrekventnijeg** tipa buba 3. Grupe s najviše buba su grupe s bubama tipa 9 i tipa 11, svaka od kojih se sastoji od 3 bube. Kardinalnost **najrjeđeg** tipa buba je 1. Grupe s najmanje buba su grupe s bubama tipa 7, tipa 0 i tipa 100, svaka od kojih se sastoji od jedne bube.

Pak ne zna tipove niti jedne bube. Međutim, ima uređaj s jednim gumbom koji mu može otkriti neke informacije o tipovima buba. Inicijalno, uređaj je prazan. Moguće je s njime raditi sljedeće tri operacije:

1. Staviti bubu u uređaj
2. Izvaditi bubu iz uređaja
3. Pritisnuti gumb

Svaka operacija smije se napraviti najviše 40 000 puta.

Svaki put kada se pritisne gumb, uređaj dojavljuje kardinalnost **najfrekventnijeg** tipa buba, uzевši u obzir samo bube koje su unutra.

Vaš je zadatak odrediti kardinalnost **najrjeđeg** tipa buba među  $N$  buba u Pakovoj kući koristeći njegov uređaj. Dodatno, u nekim podzadacima će vaš broj bodova ovisiti o najvećem broju korištenja neke podržane operacije (vidi poglavlje o podzadacima).

## Implementacijski detalji

Potrebno je implementirati sljedeću funkciju:

```
int min_cardinality(int N)
```

- $N$ : broj buba.

- Funkcija treba vratiti kardinalnost **najrjeđeg** tipa buba među  $N$  buba u Pakovoj kući.
- Funkcija će biti pozvana točno jednom.

Gornja funkcija može zvati sljedeće dvije procedure i jednu funkciju:

```
void move_inside(int i)
```

- $i$ : indeks bube koju treba staviti u uređaj. Vrijednost  $i$  treba biti između 0 i  $N - 1$  uključivo.
- Ako je ova buba već u uređaju, poziv nema nikakav utjecaj na skup buba u uređaju. Međutim, ovaj se poziv također broji kao poseban poziv.
- Ovu proceduru smijete pozvati najviše 40 000 puta.

```
void move_outside(int i)
```

- $i$ : indeks bube koju treba izvaditi iz uređaja. Vrijednost  $i$  treba biti između 0 i  $N - 1$  uključivo.
- Ako je ova buba već izvan uređaja, poziv nema nikakav utjecaj na skup buba u uređaju. Međutim, ovaj se poziv također broji kao poseban poziv.
- Ovu proceduru smijete pozvati najviše 40 000 puta.

```
int press_button()
```

- Ova funkcija vraća kardinalnost **najfrekventnijeg** tipa buba, uzevši u obzir samo skup buba unutar uređaja.
- Ovu funkciju smijete pozvati najviše 40 000 puta.
- Ocjenjivač **nije adaptivan**. Odnosno, tipovi svih  $N$  buba fiksirani su prije poziva funkcije `min_cardinality`.

## Primjer

Razmotrimo scenario u kojem imamo 6 buba s tipovima  $[5, 8, 9, 5, 9, 9]$ . Procedura `min_cardinality` poziva se na sljedeći način:

```
min_cardinality(6)
```

Procedura može pozivati `move_inside`, `move_outside`, i `press_button` prema sljedećoj tablici.

Poziv	Povratna vrijednost	bube unutar uređaja	Tipovi buba unutar uređaja
		{}	[]
move_inside(0)		{0}	[5]
press_button()	1	{0}	[5]
move_inside(1)		{0,1}	[5,8]
press_button()	1	{0,1}	[5,8]
move_inside(3)		{0,1,3}	[5,8,5]
press_button()	2	{0,1,3}	[5,8,5]
move_inside(2)		{0,1,2,3}	[5,8,9,5]
move_inside(4)		{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]
move_inside(5)		{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
press_button()	3	{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
move_inside(5)		{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
press_button()	3	{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
move_outside(5)		{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]
press_button()	2	{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]

U ovom trenutku imamo dovoljno informacija da zaključimo kako je kardinalnost najrjeđeg tipa jednaka 1. Stoga, funkcija `min_cardinality` treba vratiti 1.

U ovom primjeru, `move_inside` pozvana je 7 puta, `move_outside` pozvana je jednom, i `press_button` pozvana je 6 puta.

## Ograničenja

- $2 \leq N \leq 2000$

## Podzadaci

1. (10 bodova)  $N \leq 200$
2. (15 bodova)  $N \leq 1000$
3. (75 bodova) Bez dodatnih ograničenja.

Ako se u bilo kojem test podatku pozivi funkcija `move_inside`, `move_outside` ili `press_button` ne pridržavaju ograničenja propisanih u poglavlju o implementacijskim detaljima, ili je povratna

vrijednost funkcije `min_cardinality` netočna, osvojiti ćete 0 bodova na tom podzadatku.

Neka je  $q$  **najveća** od sljedećih triju vrijednosti: broj poziva `move_inside`, broj poziva `move_outside` i broj poziva `press_button`.

U podzadatku 3, možete osvojiti parcijalne bodove. Neka je  $m$  najveća vrijednost od  $\frac{q}{N}$  kroz sve testne podatke tog podzadatka. Osvojiti ćete bodove na ovom podzadatku prema sljedećoj tablici:

Uvjet	Bodovi
$20 < m$	0 (poruka "Output isn't correct" na CMS-u)
$6 < m \leq 20$	$\frac{225}{m-2}$
$3 < m \leq 6$	$81 - \frac{2}{3}m^2$
$m \leq 3$	75

## Ogledni ocjenjivač

Neka je  $T$  polje od  $N$  cijelih brojeva gdje je  $T[i]$  tip  $i$ -te bube.

Ogledni ocjenjivač čita ulaz u sljedećem formatu:

- redak 1:  $N$
- redak 2:  $T[0] T[1] \dots T[N - 1]$

Ako ogledni ocjenjivač detektira grešku u protokolu, izlaz oglednog ocjenjivača jest `Protocol Violation: <MSG>`, gdje `<MSG>` odgovara nekoj od sljedećih poruka:

- `invalid parameter`: prilikom poziva `move_inside` ili `move_outside`, vrijednost  $i$  nije između 0 i  $N - 1$  uključivo.
- `too many calls`: broj poziva **neke** od procedura/funkcija `move_inside`, `move_outside` ili `press_button` prelazi 40 000.

Inače, izlaz oglednog ocjenjivača je u sljedećem formatu:

- redak 1: povratna vrijednost funkcije `min_cardinality`
- redak 2:  $q$