



## Insetos Raros

Há  $N$  insetos, indexados de 0 a  $N - 1$ , circulando pela casa de Pak Blangkon. Cada inseto tem um **tipo**, que é um inteiro entre 0 e  $10^9$ , inclusive. Insetos diferentes podem ter o mesmo tipo.

Suponha que os insetos sejam agrupados por tipo. Definimos a cardinalidade do tipo de inseto **mais frequente** como o número de insetos em um grupo com o maior número de insetos. Da mesma forma, a cardinalidade do tipo de inseto **menos frequente** é o número de insetos em um grupo com o menor número de insetos.

Por exemplo, suponha que haja 11 insetos, cujos tipos são  $[5, 7, 9, 11, 11, 5, 0, 11, 9, 100, 9]$ . Neste caso, a cardinalidade do tipo de inseto **mais frequente** é 3. Os grupos com o maior número de insetos são do tipo 9 e do tipo 11, cada um consistindo de 3 insetos. A cardinalidade do tipo de inseto **menos frequente** é 1. Os grupos com menor número de insetos são do tipo 7, tipo 0 e tipo 100, cada um consistindo de 1 inseto.

Pak Blangkon não conhece o tipo de nenhum inseto. Ele possui uma máquina com um único botão que pode fornecer algumas informações sobre os tipos de insetos. Inicialmente, a máquina está vazia. Para usar a máquina, três tipos de operações podem ser realizadas:

1. Mover um inseto para dentro da máquina.
2. Mover um inseto para fora da máquina.
3. Apertar o botão da máquina.

Cada tipo de operação pode ser realizado no máximo 40 000 vezes.

Sempre que o botão é apertado, a máquina informa a cardinalidade do tipo de inseto **mais frequente**, considerando apenas os insetos dentro da máquina.

Sua tarefa é determinar a cardinalidade do tipo de inseto **menos frequente** entre todos os  $N$  insetos presentes na casa de Pak Blangkon utilizando a máquina. Além disso, em algumas subtarefas, sua pontuação depende do número máximo de operações de um determinado tipo que são realizadas (consulte a seção Subtarefas para obter detalhes).

## Detalhes de Implementação

Você deve implementar o seguinte procedimento:

```
int min_cardinality(int N)
```

- $N$ : o número de insetos.
- Este procedimento deve retornar a cardinalidade do tipo **menos frequente** entre todos os  $N$  insetos presentes na casa de Pak Blangkon.
- Este procedimento é chamado exatamente uma vez.

O procedimento acima pode fazer chamadas para os seguintes procedimentos:

```
void move_inside(int i)
```

- $i$ : o índice do inseto a ser movido para dentro da máquina. O valor de  $i$  deve estar entre 0 e  $N - 1$  inclusive.
- Se este inseto já estiver dentro da máquina, a chamada não tem efeito sobre o conjunto de insetos dentro da máquina. Entretanto, ela ainda é contada como uma chamada separada.
- Este procedimento pode ser chamado no máximo 40 000 vezes.

```
void move_outside(int i)
```

- $i$ : o índice do inseto a ser movido para fora da máquina. O valor de  $i$  deve estar entre 0 e  $N - 1$  inclusive.
- Se este inseto já estiver fora da máquina, a chamada não tem efeito sobre o conjunto de insetos na máquina. Entretanto, ela ainda é contada como uma chamada separada.
- Este procedimento pode ser chamado no máximo 40 000 vezes.

```
int press_button()
```

- Este procedimento retorna a cardinalidade do tipo de inseto **mais frequente**, considerando apenas os insetos dentro da máquina.
- Este procedimento pode ser chamado no máximo 40 000 vezes.
- O corretor é **não adaptativo**. Isto é, os tipos de todos os  $N$  insetos são fixados antes de `min_cardinality` ser chamado.

## Exemplo

Considere um cenário no qual há 6 insetos dos tipos `[5,8,9,5,9,9]` respectivamente. O procedimento `min_cardinality` é chamado da seguinte forma:

```
min_cardinality(6)
```

O procedimento pode chamar `move_inside`, `move_outside` e `press_button` da seguinte forma.

Chamada	Valor de retorno	Insetos na máquina	Tipos dos insetos na máquina
		{}	[]
move_inside(0)		{0}	[5]
press_button()	1	{0}	[5]
move_inside(1)		{0, 1}	[5, 8]
press_button()	1	{0, 1}	[5, 8]
move_inside(3)		{0, 1, 3}	[5, 8, 5]
press_button()	2	{0, 1, 3}	[5, 8, 5]
move_inside(2)		{0, 1, 2, 3}	[5, 8, 9, 5]
move_inside(4)		{0, 1, 2, 3, 4}	[5, 8, 9, 5, 9]
move_inside(5)		{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
press_button()	3	{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
move_inside(5)		{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
press_button()	3	{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
move_outside(5)		{0, 1, 2, 3, 4}	[5, 8, 9, 5, 9]
press_button()	2	{0, 1, 2, 3, 4}	[5, 8, 9, 5, 9]

Neste ponto, há informações suficientes para concluir que a cardinalidade do tipo de inseto menos frequente é 1. Portanto, o procedimento `min_cardinality` deve retornar 1.

Neste exemplo, `move_inside` é chamado 7 vezes, `move_outside` é chamado 1 vez e `press_button` é chamado 6 vezes.

## Restrições

- $2 \leq N \leq 2000$

## Subtarefas

1. (10 pontos)  $N \leq 200$
2. (15 pontos)  $N \leq 1000$
3. (75 pontos) Nenhuma restrição adicional.

Se em qualquer um dos casos de teste, as chamadas para os procedimentos `move_inside`, `move_outside` ou `press_button` não estiverem de acordo com as restrições descritas em

Detalhes de Implementação ou o valor de retorno de `min_cardinality` estiver incorreto, a pontuação de sua solução para essa subtarefa será 0.

Seja  $q$  o **máximo** dos três seguintes valores: o número de chamadas a `move_inside`, o número de chamadas a `move_outside` e o número de chamadas a `press_button`.

Na subtarefa 3, você pode obter uma pontuação parcial. Seja  $m$  o valor máximo de  $\frac{q}{N}$  em todos os casos de teste nesta subtarefa. Sua pontuação para esta subtarefa é calculada de acordo com a tabela a seguir:

Condição	Pontos
$20 < m$	0 (reportado como "Output isn't correct" no CMS)
$6 < m \leq 20$	$\frac{225}{m-2}$
$3 < m \leq 6$	$81 - \frac{2}{3}m^2$
$m \leq 3$	75

## Corretor Exemplo

Seja  $T$  um vetor de  $N$  inteiros onde  $T[i]$  é o tipo do inseto  $i$ .

O corretor exemplo lê a entrada no seguinte formato:

- linha 1:  $N$
- linha 2:  $T[0] T[1] \dots T[N - 1]$

Se o corretor exemplo detectar uma violação de protocolo, a saída do corretor exemplo é `Protocol Violation: <MSG>`, onde `<MSG>` é uma das seguintes:

- `invalid parameter`: em uma chamada a `move_inside` ou `move_outside`, o valor de  $i$  não está entre 0 e  $N - 1$  inclusive.
- `too many calls`: o número de chamadas a **algum** entre `move_inside`, `move_outside` ou `press_button` excede 40 000.

Caso contrário, a saída do corretor exemplo está no seguinte formato:

- linha 1: o valor de retorno de `min_cardinality`
- linha 2:  $q$