



## Os Insetos Mais Raros

Existem  $N$  insetos, numerados de 0 a  $N - 1$ , a correr à volta da casa do Pak Blangkon. Cada inseto tem um **tipo**, que é um inteiro entre 0 a  $10^9$  inclusive. Múltiplos insetos podem ter o mesmo tipo.

Supõe que os insetos estão agrupados por tipo. Definimos a cardinalidade do tipo de inseto **mais frequente** como sendo o número de insetos num grupo que tenha o maior número de insetos. Similarmente, a cardinalidade do tipo de inseto **mais raro** é o número de insetos num grupo que tenha o menor número de insetos.

Por exemplo, supõe que existem 11 insetos, cujos tipos são  $[5, 7, 9, 11, 11, 5, 0, 11, 9, 100, 9]$ . Neste caso, a cardinalidade do tipo de inseto **mais frequente** é 3. Os grupos com o maior número de insetos são o tipo 9 e o tipo 11, cada um consistindo em 3 insetos. A cardinalidade do tipo de inseto **mais raros** é 1. Os grupos com o menor número de insetos são o tipo 7, tipo 0 e tipo 100, cada um consistindo em 1 inseto.

O Pak Blangkon não sabe o tipo de nenhum inseto. Ele tem uma máquina com um único botão que pode dar alguma informação sobre os tipos de insetos. Inicialmente, a máquina está vazia. Para usar a máquina, três tipos de operações podem ser feitos:

1. Mover um inseto para dentro da máquina.
2. Mover um inseto para fora da máquina.
3. Pressionar o botão na máquina.

Cada tipo de operação pode ser feito no máximo 40 000 vezes.

Sempre que o botão é pressionado, a máquina reporta a cardinalidade do tipo de inseto **mais frequente**, considerando apenas os insetos dentro da máquina.

A tua tarefa é determinar a cardinalidade do tipo de inseto **mais raro** entre os  $N$  insetos na casa do Pak Blangkon usando a máquina. Adicionalmente, em algumas subtarefas, a tua pontuação depende do número máximo de operações de um dado tipo que foram feitas (vê a secção de Subtarefas para mais detalhes).

## Detalhes de Implementação

Deves implementar a seguinte função:

```
int min_cardinality(int N)
```

- $N$ : o número de insetos.
- Esta função deve devolver a cardinalidade do tipo de inseto **mais raro** entre os  $N$  insetos na casa do Pak Blangkon.
- Esta função é chamada exatamente uma vez.

A função de cima pode fazer chamadas às seguintes funções:

```
void move_inside(int i)
```

- $i$ : o índice do inseto a ser movido para dentro da máquina. O valor de  $i$  deve estar entre 0 e  $N - 1$  inclusive.
- Se este inseto já está dentro da máquina, a chamada não tem efeito no conjunto de insetos na máquina. Contudo, continua a ser contado como uma chamada separada.
- Esta função pode ser chamada no máximo 40 000 vezes.

```
void move_outside(int i)
```

- $i$ : o índice do inseto a ser movido para fora da máquina. O valor de  $i$  deve estar entre 0 e  $N - 1$  inclusive.
- Se este inseto já está fora da máquina, a chamada não tem efeito no conjunto de insetos na máquina. Contudo, continua a ser contado como uma chamada separada.
- Esta função pode ser chamada no máximo 40 000 vezes.

```
int press_button()
```

- Esta função devolve a cardinalidade do tipo de inseto **mais frequente**, considerando apenas os insetos dentro de máquina.
- Esta função pode ser chamada no máximo 40 000 vezes.
- O avaliador **não é adaptativo**. Isto é, os tipos de todos os  $N$  insetos são fixados antes de `min_cardinality` ser chamada.

## Exemplo

Considera um cenário em que existem 6 insetos de tipos  $[5, 8, 9, 5, 9, 9]$  respetivamente. A função `min_cardinality` é chamada da seguinte maneira:

```
min_cardinality(6)
```

Esta função poderia chamar `move_inside`, `move_outside` e `press_button` da seguinte maneira:

Chamada	Valor devolvido	Insetos na máquina	Tipos de insetos na máquina
		{}	[]
move_inside(0)		{0}	[5]
press_button()	1	{0}	[5]
move_inside(1)		{0, 1}	[5, 8]
press_button()	1	{0, 1}	[5, 8]
move_inside(3)		{0, 1, 3}	[5, 8, 5]
press_button()	2	{0, 1, 3}	[5, 8, 5]
move_inside(2)		{0, 1, 2, 3}	[5, 8, 9, 5]
move_inside(4)		{0, 1, 2, 3, 4}	[5, 8, 9, 5, 9]
move_inside(5)		{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
press_button()	3	{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
move_inside(5)		{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
press_button()	3	{0, 1, 2, 3, 4, 5}	[5, 8, 9, 5, 9, 9]
move_outside(5)		{0, 1, 2, 3, 4}	[5, 8, 9, 5, 9]
press_button()	2	{0, 1, 2, 3, 4}	[5, 8, 9, 5, 9]

Neste ponto, existe suficiente informação para concluir que a cardinalidade do tipo de inseto mais raro é 1. Desse modo, a função `min_cardinality` deve devolver 1.

Neste exemplo, `move_inside` é chamada 7 vezes, `move_outside` é chamada 1 vez e `press_button` é chamada 6 vezes.

## Restrições

- $2 \leq N \leq 2000$

## Subtarefas

1. (10 pontos)  $N \leq 200$
2. (15 pontos)  $N \leq 1000$
3. (75 pontos) Sem restrições adicionais.

Se em algum destes casos de teste as chamadas às funções `move_inside`, `move_outside`, ou `press_button` não forem conforme as restrições descritas nos Detalhes de Implementação, ou se

o valor devolvido por `min_cardinality` for incorreto, a pontuação da tua solução para essa subtarefa será 0.

Seja  $q$  o **máximo** dos seguintes três valores: o número de chamadas a `move_inside`, o número de chamadas a `move_outside` e o número de chamadas a `press_button`.

Na subtarefa 3 podes obter pontuação parcial. Seja  $m$  o valor máximo de  $\frac{q}{N}$  entre todos os casos de teste nesta subtarefa. A tua pontuação para esta subtarefa é calculada de acordo com a seguinte tabela:

Condição	Pontos
$20 < m$	0 (reportado como "Output isn't correct" no CMS)
$6 < m \leq 20$	$\frac{225}{m-2}$
$3 < m \leq 6$	$81 - \frac{2}{3}m^2$
$m \leq 3$	75

## Avaliador Exemplo

Seja  $T$  um array  $N$  inteiros onde  $T[i]$  é o tipo de inseto  $i$ .

O avaliador exemplo lê o input no seguinte formato:

- linha 1:  $N$
- linha 2:  $T[0] T[1] \dots T[N - 1]$

Se o avaliador exemplo detetar uma violação do protocolo, o output do avaliador exemplo é `Protocol Violation: <MSG>`, onde `<MSG>` é uma das seguintes:

- `invalid parameter`: numa chamada a `move_inside` ou `move_outside`, o valor de  $i$  não está entre 0 e  $N - 1$  inclusive.
- `too many calls`: o número de chamadas a **qualquer uma** das funções `move_inside`, `move_outside`, ou `press_button` excede 40 000.

De outro modo, o output do avaliador está no seguinte formato:

- linha 1: o valor devolvido por `min_cardinality`
- linha 2:  $q$