



## Rarest Insects

Există  $N$  insecte, numerotate de la 0 la  $N - 1$ , care zboară în jurul casei lui Pak Blangkon. Fiecare insectă este de un **tip**, care este un întreg între 0 și  $10^9$  inclusiv. Mai multe insecte pot fi de același tip.

Să presupunem că insectele sunt grupate după tipul lor. Definim cardinalul **celui mai frecvent** tip de insectă ca numărul insectelor dintr-un grup cu cel mai mare număr de insecte. Similar, cardinalul **celui mai rar** tip de insectă este numărul insectelor dintr-un grup cu cel mai mic număr de insecte.

De exemplu, să presupunem că avem 11 insecte, ale căror tipuri sunt  $[5, 7, 9, 11, 11, 5, 0, 11, 9, 100, 9]$  respectiv. În acest caz, cardinalul **celui mai frecvent** tip de insectă este 3. Grupurile cu cel mai mare număr de insecte sunt cele de tipurile 9 și 11, fiecare conținând câte 3 insecte. Cardinalul **celui mai rar** tip de insectă este 1. Grupurile cu cel mai mic număr de insecte sunt cele de tipurile 7, 0 și 100, fiecare conținând câte o insectă.

Pak Blangkon nu cunoaște tipul niciunei insecte. El are un dispozitiv cu un singur buton care poate oferi anumite informații despre tipurile insectelor din dispozitiv. Inițial, dispozitivul este gol. Pentru a utiliza dispozitivul, pot fi efectuate trei tipuri de operații:

1. Introduceți o insectă în dispozitiv.
2. Scoateți o insectă din dispozitiv.
3. Apăsăți butonul dispozitivului.

Fiecare tip de operație poate fi efectuată cel mult 40 000 ori.

Ori de câte ori butonul este apăsat, dispozitivul raportează cardinalul **celui mai frecvent** tip de insectă, considerând doar insectele din dispozitiv.

Sarcina voastră este să determinați cardinalul **celui mai rar** tip de insectă din toate cele  $N$  insecte din casa lui Pak Blangkon utilizând dispozitivul. De asemenea, pentru unele subtask-uri, punctajul acordat va depinde de numărul maxim de operații de un anumit tip care sunt efectuate (vedeți secțiunea Subtask-uri pentru detalii).

## Detalii de implementare

Veți implementa următoarea procedură:

```
int min_cardinality(int N)
```

- $N$ : numărul de insecte.
- Această procedură va returna cardinalul **celui mai rar** tip de insectă din toate cele  $N$  insecte din casa lui Pak Blangkon.
- Această procedură se va apela exact o singură dată.

Procedura de mai sus poate apela următoarele proceduri:

```
void move_inside(int i)
```

- $i$ : indexul insectei ce se introduce în dispozitiv. Valoarea  $i$  va fi între 0 și  $N - 1$ , inclusiv.
- Dacă această insectă este deja în dispozitiv, apelul nu va avea niciun efect asupra mulțimii de insecte din dispozitiv. Oricum, acest apel va fi cuantificat ca un apel separat.
- Această procedură poate fi apelată de cel mult 40 000 ori.

```
void move_outside(int i)
```

- $i$ : indexul insectei ce se scoate din dispozitiv. Valoarea  $i$  va fi între 0 și  $N - 1$  inclusiv.
- Dacă această insectă este deja în afara dispozitivului, apelul nu va avea niciun efect asupra mulțimii de insecte din dispozitiv. Oricum, acest apel va fi cuantificat ca un apel separat.
- Această procedură poate fi apelată de cel mult 40 000 ori.

```
int press_button()
```

- Această procedură returnează cardinalul **celui mai frecvent** tip de insectă ținând cont doar de insectele din interiorul dispozitivului.
- Această procedură poate fi apelată de cel mult 40 000 ori.
- Grader-ul **nu este adaptiv**. Prin urmare, tipurile pentru toate cele  $N$  insecte sunt fixate înainte de apelul `min_cardinality`.

## Exemplu

Considerăm un scenariu în care sunt 6 insecte de tipurile  $[5, 8, 9, 5, 9, 9]$  respectiv. Procedura `min_cardinality` este apelată astfel:

```
min_cardinality(6)
```

Procedura poate apela procedurile `move_inside`, `move_outside`, și `press_button` astfel:

Apel	Valoarea returnată	Insecte în dispozitiv	Tipurile insectelor din dispozitiv
		{}	[]
move_inside(0)		{0}	[5]
press_button()	1	{0}	[5]
move_inside(1)		{0,1}	[5,8]
press_button()	1	{0,1}	[5,8]
move_inside(3)		{0,1,3}	[5,8,5]
press_button()	2	{0,1,3}	[5,8,5]
move_inside(2)		{0,1,2,3}	[5,8,9,5]
move_inside(4)		{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]
move_inside(5)		{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
press_button()	3	{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
move_inside(5)		{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
press_button()	3	{0,1,2,3,4,5}	[5,8,9,5,9,9]
move_outside(5)		{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]
press_button()	2	{0,1,2,3,4}	[5,8,9,5,9]

În acest moment există suficientă informație pentru a concluziona că **cel mai rar** tip de insectă are cardinalul 1. Prin urmare, procedura `min_cardinality` va returna 1.

În acest exemplu, `move_inside` este apelată de 7 ori, `move_outside` este apelată o dată, și `press_button` este apelată de 6 ori.

## Restricții

- $2 \leq N \leq 2000$

## Subtask-uri

1. (10 puncte)  $N \leq 200$
2. (15 puncte)  $N \leq 1000$
3. (75 puncte) Fără alte restricții.

Dacă pentru oricare din teste, apelurile procedurilor `move_inside`, `move_outside`, sau `press_button` nu sunt conforme cu restricțiile descrise în Detalii de implementare, sau dacă

valoarea returnată de `min_cardinality` este incorectă, atunci punctajul acordat soluției voastre pentru subtask-ul respectiv va fi 0.

Fie  $q$  **maximul** următoarelor trei valori: numărul apelurilor `move_inside`, numărul apelurilor `move_outside` și numărul apelurilor `press_button`.

Pentru subtask-ul 3 puteți obține un punctaj parțial. Fie  $m$  valoarea maximă a  $\frac{q}{N}$  pentru toate testele din acest subtask. Punctajul vostru pentru acest subtask este calculat conform următorului tabel:

Condiție	Puncte
$20 < m$	0 (raportat ca "Output isn't correct" în CMS)
$6 < m \leq 20$	$\frac{225}{m-2}$
$3 < m \leq 6$	$81 - \frac{2}{3}m^2$
$m \leq 3$	75

## Grader-ul local

Fie  $T$  un tablou unidimensional format din  $N$  întregi, unde  $T[i]$  este tipul insectei  $i$ .

Grader-ul local citește intrarea în următorul format:

- linia 1:  $N$
- linia 2:  $T[0] T[1] \dots T[N - 1]$

Dacă grader-ul local detectează o încălcare a protocolului, ieșirea grader-ului local va fi `Protocol Violation: <MSG>`, unde `<MSG>` este una din următoarele:

- `invalid parameter`: într-un apel `move_inside` sau `move_outside`, valoarea lui  $i$  nu este între 0 și  $N - 1$  inclusiv.
- `too many calls`: numărul de apeluri al **oricărei** din `move_inside`, `move_outside`, sau `press_button` depășește 40 000.

Altfel, ieșirea grader-ului local este în următorul format:

- lina 1: valoarea returnată de `min_cardinality`
- lina 2:  $q$